Anné universitaire 2018-2019
Session d'Automne 2018

Université IBN TOFAÏL

Ecole Nationale
Des
Sciences appliquées

Cycle préparatoire

Semestre 3

Cours de Calcul différentiel

Fiche 2:
Espaces de Banach
Espaces vectoriels normés et compacts
Espaces vectoriels normés et connexes

Pr. Ch. Bensouda

Chapter 1 Espaces de Banach, espaces vectoriels normés compacts et espaces vectoriels normés connexes:

1.1 Les suites: Convergence et Valeurs d'adhérences:

Définition:

Soit $(E, \|-\|)$, un espace vectoriel normé.

- Une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge vers $u \in E$ si

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n - u\|) = 0$$

ou encore; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que

$$\|u_n - u\| \leq \varepsilon \ ; \ n \geq N.$$

On écrit alors

$$\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) = u \in E.$$

Remarque:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $A \subset E$, une partie non vide. Alors:

- Un vecteur $u \in E$ est un vecteur adhérent à A $\left(u \in \overline{A}\right)$ si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers $u \in E$.

Conséquence:

- Pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers $u \in E$, sa limite

$$\left(\lim_{n} u_n\right) = u \in \overline{A} \subset E.$$

Définitions:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

- On dit que $a \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ si

$$a \in \overline{\{u_k \ ; \ k \geq n\}} \ ; \ n \geq 1$$

- L'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(u_n)_n$ est donné par

$$\left(\bigcap_{n\geq 1} \overline{\{u_k \ ; \ k \geq n\}}\right).$$

Proposition:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

- Pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de E, les assertions suivantes sont équivalentes.

1- $a \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$

2- Pour tout $V \in \mathcal{V}_a$, un voisinage de a; on a

$$\{u_k \ ; \ k \geq n\} \cap V \neq \emptyset \ ; \ n \geq 1$$

3- Pour tout $V \in \mathcal{V}_a$, un voisinage de a; l'ensemble

$$\{k \geq n \ / \ u_k \in V\} \text{ infini } ; n \geq 1.$$

4- La suite $(u_n)_n$ admet une sous suite qui converge vers $a \in E$.

Conséquences:

Soient $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E.

-Toute limite d'une sous suite extraite $(u_{n_k})_{n_k}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

<u>En particulier:</u>

- Si la suite $(u_n)_n$ est convergente alors sa limite est l'unique valeur d'adhérence. On a alors

$$\left(\bigcap_{n\geq 1} \overline{\{u_k \ ; \ k \geq n\}}\right) = \left\{\left(\lim_n u_n\right)\right\} \subset E.$$

Exemples:

1- La suite $(u_n)_n$, des nombres réels, donnée par

$$u_n = (-1)^n \ ; \ n \geq 0$$

admet deux valeurs d'adhérences

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\{u_k \ ; \ k \geq n\}} = \{-1, +1\}.$$

2- La suite $(v_n)_n$, des nombres réels, donnée par

$$v_n = (-3)^n \ ; \ n \geq 0$$

n'admet aucune valeur d'adhérence

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\{v_k \ ; \ k \geq n\}} = \emptyset.$$

3- La suite $(w_n)_n$, des nombres réels, donnée par

$$w_n = \left(\frac{-1}{5}\right)^n \ ; \ n \geq 0$$

admet une valeur d'adhérence unique

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\{w_k \ ; \ k \geq n\}} = \{0\}.$$

4- La suite $(u_n)_n$, d'éléments de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$u_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n+1}\right) \ ; \ n \geq 0$$

admet deux valeurs d'adhérences

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\{u_k \ ; \ k \geq n\}} = \{(-1, 0), (+1, 0)\}.$$

5- La suite $(v_n)_n$, d'éléments de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$v_n = \left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}, \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \ ; \ n \geq 0$$

admet une valeur d'adhérence unique

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\{v_k \ ; \ k \geq n\}} = \{(0,0)\}\,.$$

6- La suite $(w_n)_n$, d'éléments de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$w_n = \left(\frac{n^3}{n^2+1}, \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) \ ; \ n \geq 0$$

n'admet aucune valeur d'adhérence

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\{w_k \ ; \ k \geq n\}} = \emptyset.$$

1.2 Espaces de Banach:

1.2.1 Définitions et notations:

Définition:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

- Une suites $(u_n)_n$ d'éléments de E est dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tels que

$$\|u_p - u_q\| \leq \varepsilon \ ; \ p, q \geq N$$

On écrit alors conventionnellement

$$\left(\lim_{p,q \to \infty} \|u_p - u_q\| \right) = 0.$$

Remarques:

Soit $(E, \|-\|)$, un espace vectoriel normé.

- Toute suite convergente dans $(E, \|-\|)$ est de Cauchy.

- Toute suite de Cauchy $(u_n)_n$ dans $(E, \|-\|)$ qui admet une sous suite convergente est nécessairement convergente.

Définition:

- Un espace vectoriel normé $(E, \|-\|)$ est complet si toute suite de Cauchy est convergente

- Un espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.

Proposition:

- Tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ est un espace de Banach.

Théorème:

Soit S un ensemble non vide.

- L'espace des applications bornées sur S muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

On écrit:

$$\left(\mathcal{F}_b\left(S,\mathbb{K}\right), \|-\|_\infty\right) \text{ est un espace de Banach.}$$

Corollaire:

- L'espace des suites bornées

$$l^\infty\left(\mathbb{Z},\mathbb{K}\right) = \left\{\left(u_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^\mathbb{Z} \ / \ \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \in \mathbb{R}_+\right\}$$

muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

On écrit:

$$\left(l^\infty\left(\mathbb{Z},\mathbb{K}\right), \|-\|_\infty\right) \text{ est un espace de Banach.}$$

1.3 Espaces vectoriels normés et compacts:

1.3.1 Définitions et notations:

Définitions:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- Une partie

$$K \subset E \text{ est dite compact}$$

si de toute suite infinie d'éléments de K, on peut extraire une sous suite qui converge dans K.

<u>On écrit:</u>

- De toute suite infinie $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de K, on peut extraire une sous suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que

$$\left(\lim_k u_{n_k}\right) \in K \subset E.$$

- Une partie

$$A \subset E$$

est dite relativement compacte s'il existe

$$K \subset E \text{ un compact de } E$$

tel que

$$A \subset K \subset E$$

Conséquence:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- Tout fermé dans un compact est compact.

- La fermeture d'une partie relativement compacte de E est compacte dans E.

Proposition:

- Tout espace vectoriel normé et compact est nécessairement complet donc un Banach

Exemples:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- Tout partie finie de E est compacte.

- Pour toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E qui converge vers $u \in E$; la partie

$$K = \{u_n \ / \ n \geq 1\} \cup \{u\}$$

est compacte.

Conséquences:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- Tout partie compacte est nécessairement fermée.
- Tout partie compacte est nécessairement bornée.
- L'espace vectoriel normé $\mathbb{K}^d$ n'est pas compact.
- Les seules parties compacts de $\mathbb{K}^d$ sont les parties à la fois fermées et bornées.
- Les seules parties relativement compactes de $\mathbb{K}^d$ sont les parties bornées.

1.4 Espaces vectoriels normés et connexes:

1.4.1 Définitions et exemples:

Définition:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- L'espace $(E, \|-\|)$ est dit connexe si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont l'espace E tout entier et l'ensemble vide $\emptyset$.

Proposition:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- L'espace $(E, \|-\|)$ est connexe si, et seulement si, l'espace E tout entier ne peut être réunion d'ouverts deux à deux disjoints.

Autrement dit:

- Pour deux ouverts

$$U \ , V \subset E \text{ tels que } \begin{cases} E = (U \cup V) \\ (U \cap V) = \emptyset \end{cases}$$

nécessairement

$$U = \emptyset \text{ ou bien } V = \emptyset.$$

Définition:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- Une partie

$$A \subset E$$

sera dite connexe si pour deux ouverts

$$U \ , V \subset E \text{ tels que } \begin{cases} A \subset (U \cup V) \\ (U \cap V) = \emptyset \end{cases}$$

nécessairement

$$U = \emptyset \text{ ou bien } V = \emptyset.$$

Exemples:

- L'espace vectoriel normé $\mathbb{K}^d$ est connexe.
- La partie $\mathbb{Q}^d$ n'est pas connexe dans $\mathbb{K}^d$.

- Les seules parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Remarque:

- Pour $a \neq b$ dan $\mathbb{R}$; les parties

$$A = \mathbb{R}\times\{a\} \text{ et } B = \mathbb{R}\times\{b\}$$

sont toutes les deux connexes avec

$$A \cap B = \emptyset.$$

Leur réunion

$$A \cup B = \mathbb{R}\times\{a\} \cup \mathbb{R}\times\{b\}$$

n'est pas connexe.

Proposition:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- Une réunion de deux parties connexes non deux à deux disjointes reste connexe.

Remarque:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- L'intersection de deux connexes n'est pas nécessairement connexe.

Proposition:

Soient $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$, une partie connexe de E.

- Toute partie $B \subset E$ telle que

$$A \subset B \subset \overline{A} \subset E$$

est nécessairement connexe.

Conséquence:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- La fermeture de toute partie connexe reste connexe.

Définitions:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- On appelle composante connexe de $x \in E$, la plus grande partie connexe de E contenant x.

Conséquence:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

- Toute composante connexe de E est à la fois ouverte et fermée.

Proposition:

Soient $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé et $x \in E$.

- On désigne par $\mathcal{W}_x$ la classe de toutes les parties connexes de E contenant $x \in E$ et par $\mathcal{F}_x$, la classe des parties à la fois ouvertes et fermées dans E contenant x. Alors; la composante connexe de $x \in E$ est donnée par

$$W_x = \left(\bigcup_{W \in \mathcal{W}_x} W\right) = \left(\bigcup_{W \in \mathcal{W}_x} \overline{W}\right) = \left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}_x} A\right).$$

Remarque:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

- La classes $\mathcal{W}(E)$; classe des composantes connexes de E constitue une partition de E. On a

$$\text{Si } W_x \cap W_y \neq \emptyset \text{ alors } W_x = W_y.$$

Si non;

$$W_x \cap W_y = \emptyset.$$

Et on a

$$E = \left(\bigcup_{W_x \in \mathcal{W}(E)} W_x \right).$$